N. N.
18.10.13
-1-

Квантова теория на полето и елементарните частици: Лекция 3

Николай М. Николов

Забележка: с червено са отбелязани части от лекцията, в които е имало пропуски или са приведени допълнителни сведения.

Начало на следващата лекция: 9:45 (петък, 229 ауд. на ФМИ)

Квантова динамика

Преди да преминем конкретно към въпроса за описание на динамиката на една квантова система, ние ще дискутираме едно по-общо понятие, което ще обхваща не само трансформациите на системата при еволюция но и произволни такива, например при преобразувания на симетрия.

1. Квантови трансформации

В курса до тук ние въведохме две съвкупности от обекти, които стоят в началото на описанието на всяка физична система: това са множествата от наблюдаемите величини на системата и на състоянията на системата. Между тези две съвкупности ние определихме едно основно сдвояване зададено от средната стойност, $\omega(A)$, на една величина A в състояние ω.

Ние имаме две главни възможности да въведем понятие за трансформация на една квантова система: или като преобразуване в множеството от състояния, което е прието да се нарича картина на Шрьодингер, или като трансформация на наблюдаемите, което се нарича картина на Хайзенберг. Това сме изобразили със следната схема.

N. N.
18.10.13
-2-

Множество на състоянията $\{\omega, \omega', \dots\}$		Множество на наблюдаемите $\{A, B, \dots\}$
↑ Картина на Шрьодингер	$\omega(A)$ = средна стойност на A в ω	↑ Картина на Хайзенберг

За да установим връзка между тези две описания на квантовите трансформации ние трябва да използваме основното сдвояване между състояния и величини – средната стойност. Наистина, ние наблюдаваме квантовите трансформации именно чрез изменението на средните стойности измерени при експерименти. Ето защо връзката между двете картини трява да е таква, че те да определят едно и също изменение на средните стойности. Последното условие математически се формализира по следния начин: нека в картината на Шрьодингер при една квантова трансформация състоянието ω е преминало в ω',

$$\omega \mapsto \omega' \quad \text{– в картина на Шрьодингер,}$$

и нека при свответстващото описание в картината на Хайзенберг (при което се преобразуват наблюдаемите) дадена наблюдаема A се е преобразувала в A',

$$A \mapsto A' \quad \text{– в картина на Хайзенберг.}$$

Тогава искаме при двете описания средната стойност на A в ω да се е преобразувала в едно и също число:

$$\omega(A) \quad \mapsto \quad \omega'(A) = \omega(A').$$

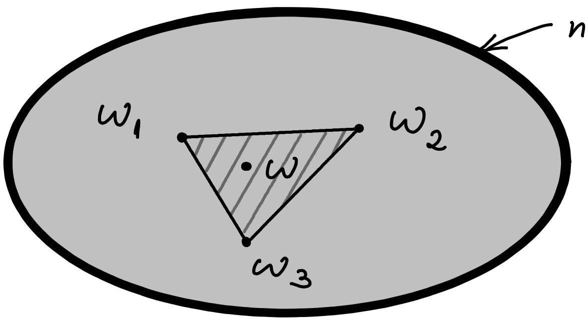
Именно последното равенство и установява връзката между двете картини, на Шрьодингер и на Хайзенберг.

В резюме: при картината на Шрьодингер приемаме, че се преобразуват състоянията, а наблюдаемите – не; в картината на Хайзенберг е обратното.

1.1. Квантови трансформации в картина на Шрьодингер

Най-общо, една квантова трансформация при картината на Шрьодингер трябва да бъде изображение на множеството на състояния в себе си, при което установените структури и релации в това множество се запазват. Такива изображения в математиката се наричат морфизми на съответната структура. В нашия случай ние ще се интересуваме от обратими трансформации, т.е., при които съответните изображения са взаимно-еднозначни и обратими (биекции). В математиката такива морфизми се наричат автоморфизми.

Първоначалната структура, която установихме в множеството на състояния е на изпъкнало подмножество във векторно пространство, като граничните (екстремалните) точки на това множество нарекохме чисти състояния.



подмножество на чистите състояния

$\omega = p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + p_3\omega_3$ $(+\cdots)$
– смес (смесено състояние)
$(p_1, p_2, p_3 \geq 0,\ p_1+p_2+p_3 = 1)$.

N. N.
18.10.13

Така, автоморфизъм на тази структура (т.е., взаимно-еднозначно и обратимо съответствие, при което структурата се запазва) е всяко афинно изображение при което подмножеството на граничните (екстремалните) точки преминава в себе си. С други думи, всяко чисто състояние трябва да премине в чисто състояние.

Важен случай е когато множеството от наблюдаеми се задава с множеството от самоспрегнати оператори в едно (пред)Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ (ние аргументирахме още в първата лекция защо този случай е "представителен" въз основа на GNS теоремата). Във втората лекция установихме, че в този случай множеството от чисти състояния е в 1-1 съответствие с единичните лъчи в $\mathcal{H}$:

$$\omega \longleftrightarrow \{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \qquad (\phi\in\mathcal{H}\,,\ \|\phi\| = 1)$$

$$\omega(A) = \langle\phi\,|\,A\,\phi\rangle\,,$$

като единичните вектори ϕ представящи състоянието ω се наричат вектори на състоянието. В допълнение, установихме че скаларното произведение между два вектора на (различни) състояния, ϕ и ψ, има определен физичен смисъл:

$$|\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2 = \text{вероятността за преход от } \phi \text{ към } \psi\,.$$

Забележете, $|\langle\phi\,|\,\psi\rangle|^2$ не зависи от избраните представители ϕ и ψ, съответно на единичните лъчи $\{e^{i\alpha}\phi\}$ и $\{e^{i\alpha}\psi\}$. Така стигаме много естествено до следното твърдение формулирано и доказано от Вигнер (Eugene Wigner, 1931):

N. N.
18.10.13

Теорема на Вигнер (Wigner's theorem)

Нека τ е взаимно-еднозначно и обратимо съответствие на множеството $\{\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \mid \phi\in\mathcal{H}, \|\phi\|=1\}$ от единични лъчи на едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ в себе си, такова че ако

$$\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\phi'\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \text{ и}$$

$$\{e^{i\alpha}\psi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}\psi'\}_{\alpha\in\mathbb{R}},$$

то $|\langle\phi|\psi\rangle|^2 = |\langle\phi'|\psi'\rangle|^2$ (за $\forall \phi,\psi\in\mathcal{H}$, $\|\phi\|=\|\psi\|=1$).
Тогава съществува изображение $T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$, което е:

- взаимно-еднозначно и обратимо;
- унитарно или антиунитарно (определенията следват по-долу);
- T представя τ по формулата:

$$\{e^{i\alpha}\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \overset{\tau}{\longmapsto} \{e^{i\alpha}T\phi\}_{\alpha\in\mathbb{R}} \quad (\forall\phi\in\mathcal{H}, \|\phi\|=1).$$

Ние няма да привеждаме доказателство на тази теорема в настоящия курс, но ще направим редица

Коментари: 1.) Унитарна (респективно, антиунитарна) трансформация $T:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ в едно Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ наричаме всяко линейно (респ., антилинейно) изображение за което:

$$\langle T\phi|T\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle \quad (\text{респ., } \langle T\phi|T\psi\rangle = \overline{\langle\phi|\psi\rangle}),$$

за $\forall\phi$ и $\psi\in\mathcal{H}$. Тъй като $\langle\phi|T^*T\psi\rangle = \langle T\phi|T\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle$ (за случая на унитарна T), то еквивалентно условие е:

$$T^*T = 1 \quad (\text{а при обратимост: } T^* = T^{-1}).$$

2.) В случая когато $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$, квантовите трансформации, които са унитарни се задават с унитарни $N \times N$-матрици.
3.) Трансформацията T, която съществува по теоремата на Вигнер не е единствена: $T' = e^{i\beta} T$ за $\forall \beta \in \mathbb{R}$ представя същата квантова трансформация.
4.) Теоремата на Вигнер може да се изкаже по-кратко на по-напреднал математичен език по следния начин: всяко изображение на проективизацията на едно Хилбертово пространство в себе си, което запазва ъглите, се индуцира от унитарна или антиунитарна трансформация.
5.) Когато квантовите трансформации описват еволюцията на системата или идват от друга непрекъсната поредица от преобразувания на симетрия стартиращи от единичната трансформация (тъждественото преобразувание), тогава от съображения за непрекъснатост следва, че представящите трансформации $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ са унитарни, а не антиунитарни, тъй като единичния оператор е унитарен, а условието за унитарност - непрекъснато. От друга страна, съществуват определени дискретни преобразувания на симетрия, за които се доказва, че непременно трябва да се представят от антиунитарни изображения.

1.2. Квантови трансформации в картина на Хайзенберг

В момента разполагаме с два начина за въвеждането на квантовите трансформации по картината на Хайзенберг.

(а) Първо, ние можем да изходим от установеното вече понятие за квантова трансформация в картината на Шрьодингер и да го "прехвърлим" в картината на Хайзенберг по установената връзка базираща се на еднаквостта в изменението на средните стойности при описанията в двете картини.

N. N.
18.10.13

И така, нека T е унитарна (за определеност) трансформация, която задава квантова трансформация в картината на Шрьодингер: състояние с вектор ϕ преминава в състояние с вектор $\phi' = T\phi$. Нека при съответното описание на тази трансформация в картината на Хайзенберг една наблюдаема A се е трансформирала в A'. Връзката, която намерихме между тези две описания е:

$$\left(\omega'(A) \equiv\right) \langle \phi' | A \phi' \rangle = \langle \phi | A' \phi \rangle \left(\equiv \omega(A')\right)$$

$$\Rightarrow \quad \langle T\phi | A T \phi \rangle = \langle \phi | A' \phi \rangle$$

$$\langle T\phi | A T \phi \rangle = \langle \cancel{T}\phi | \cancel{T} T^{-1} A \phi \rangle = \langle \phi | T^{-1} A T \phi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \langle \phi | (\underbrace{A' - T^{-1} A T}_{:= C}) \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}.$$

Но $C = C^*$, понеже $(A')^* = A'$ (A' е отново наблюдаема) и $(T^{-1} A T)^* = (T^* A T)^* = T^* A T^{**} = T^{-1} A T$.

От друга страна е в сила следния факт (без доказателство):

<u>Твърдение</u>. Ако C е самоспрегнат оператор в (пред) Хилбертово пространство $\mathcal{H}$ за който $\langle \phi | C \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$, то $C = 0$.

<u>Забележка</u>. Сравнително по-просто твърдение, в сила за произволен линеен оператор C е, че от $\langle \phi | C \psi \rangle = 0 \ \forall \phi, \psi \in \mathcal{H}$ следва, че $C = 0$. (Наистина, например когато $\mathcal{H}$ е крайно-мерно и ϕ и ψ пробягват ортонормиран базис, то следва че оператора C има нулева матрица.)

Полученият резултат е, че в картината на Хайзенберг трансформацията на наблюдаемите се поражда отново от унитарни (или антиунитарни) трансформации $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ по формулата

$$A \longmapsto T^{-1} A T.$$

Горната трансформация е един много специален вид трансформация в алгебрата: тя изпраща произведение в произведение:

$$T^{-1}(AB)T = (T^{-1}AT)(T^{-1}BT).$$

<u>Определение</u>. Нека $\mathcal{A}$ е асоциативна $*$-алгебра с единица $\hat{1}$. Нека $u : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ е линейно изображение, за което формулираме следните свойства (за $\forall A, B \in \mathcal{A}$):

(m1) $u(A.B) = u(A).u(B)$,

(m2) $u(A^*) = u(A)^*$,

(m3) $u(\hat{1}) = \hat{1}$.

При изпълнение на (m1) казваме, че u е морфизъм на асоциативни алгебри. При (m1) и (m2): морфизъм на $*$-алгебри, а при (m1), (m2) и (m3): морфизъм на $*$-алгебри с единица.

Когато u е биекция, той се нарича автоморфизъм.

Автоморфизмите от вида

$$u(A) = \mathcal{U} A \mathcal{U}^{-1} \quad (A \in \mathcal{A})$$

за обратим елемент $\mathcal{U}$ на алгебрата $\mathcal{A}$ наричаме вътрешни.

N. N.
18.10.13

(б) Дотук, изхождайки от картината на Шрьодингер ние направихме определени заключения за картината на Хайзенберг.

Ние можем обаче да разсъждаваме за картината на Хайзенберг, по независим път. По подобие на разсъжденията при картината на Шрьодингер ние можем да поискаме при тази на Хайзенберг трансформацията на наблюдаемите да е изображение на множеството от наблюдаеми в себе си, при което се запазват въведените структури и операции над наблюдаеми. С други думи, изображение което е морфизъм на структурата. Както резюмирахме в началото на втората лекция структурата на множеството от наблюдаеми се определя от една асоциативна $*$-алгебра $\mathcal{A}$ с единица. Така, ние потвърждаваме нашия извод от края на предната подточка, че трансформацията на наблюдаеми при картината на Хайзенберг се задава от автоморфизъм на $*$-алгебри с единица.

Допълнителни коментари: 1.) При $\mathcal{A} = Op(\mathbb{C}^N) \equiv M_N(\mathbb{C})$ - $*$-алгебрата на $N\times N$-матрици има теорема гласяща, че всеки автоморфизъм на $\mathcal{A}$ е вътрешен. За по-общи $*$-подалгебри $\mathcal{A} \subseteq Op(\mathcal{H})$ не всеки автоморфизъм е вътрешен. Автоморфизми, които (не) са вътрешни се наричат още унитарно (не)представими.

2.) Случаят, в който при картината на Шрьодингер се получават антиунитарни трансформации съответства в картината на Хайзенберг на антилинейни $*$-автоморфизми на алгебри (с единица).

N. N.
18.10.13

3.) Унитарната непредставимост има важна физическа интерпретация: когато една симетрия се описва от (група от) автоморфизми, които не са унитарно представими се говори за спонтанно нарушена симетрия. В този случай физическите закони, които са "закодирани" в алгебрата $\mathcal{A}$ имат симетрия, която обаче не се реализира в Хилбертовото пространство на състоянията. Типичен пример е фероманнит, в който системата е преминала спонтанно в състояние с определена намагнетизация, което нарушава спонтанно ротационната симетрия. Същия математически феномен е в основата на "механизма на Хигс" при който се "раждат маси" в следствие на спонтанно нарушена симетрия.

4.) И така, картината на Хайзенберг, макар и да се счита по същество за еквивалентна на картината на Шрьодингер, е всъщност малко по-обща поради възможността за унитарно непредставими трансформации.

N. N.
18.10.13

2. Квантови динамични системи

В тази част на настоящата лекция ще разсъждаваме в картината на Шрьодингер, като за по-голяма простота и прецизност ще приемем, че Хилбертовото пространство $\mathcal{H}$ е крайно-мерно ($\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$).

Еволюцията на една квантова система се задава от квантови трансформации определени за всяка двойка моменти от време

$U(t, t_0)$ = операторът съответстващ на еволюцията на системата от момента t_0 към момента t_1 ($t_0, t_1 \in \mathbb{R}$).

Както отбелязахме вече, от съображения за непрекъснатост следва, че $U(t, t_0)$ трябва е унитарна, а не антиунитарна трансформация:

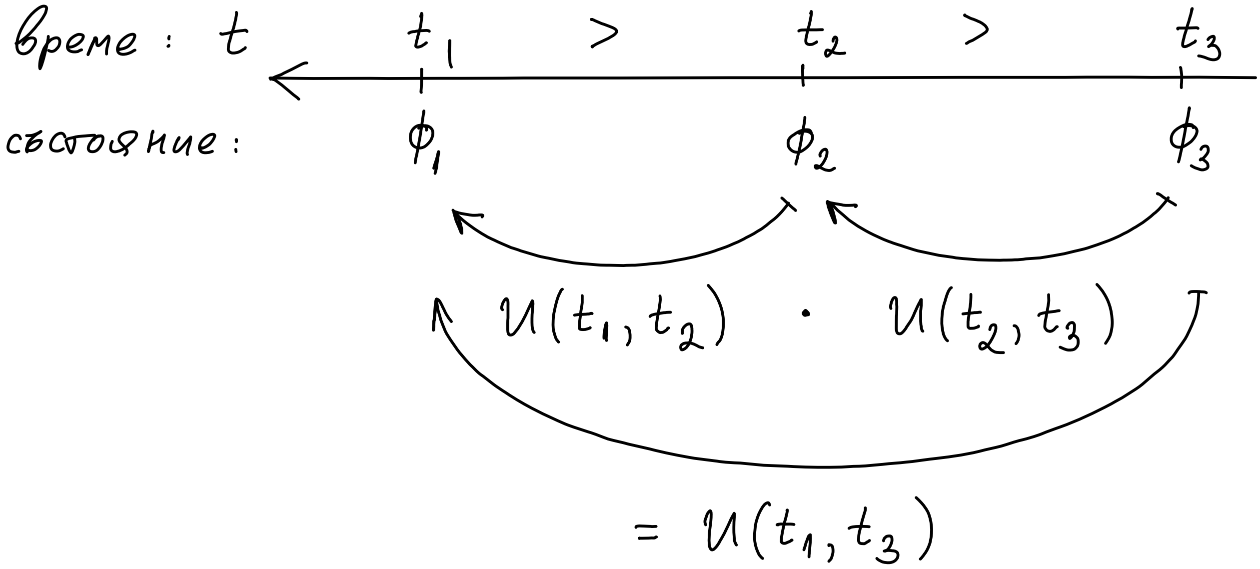
$$U(t, t_0)^* = U(t, t_0)^{-1}$$

Така, ако в момента t_0 системата е била в състояние с вектор ϕ, то в момента t системата е еволюирала в състояние с вектор

$$U(t, t_0)\phi.$$

В частност, $U(t, t) = \hat{1}$ = "липса на еволюция поради липса на протекло време".

Друго естествено следствие е закона за композиция



(Тук явно се вижда и ролята на левия стил на функционалните записи в математиката "$y = f(x)$".)

<u>Определение</u> Оператори на еволюцията наричаме система от трансформации $\mathcal{U}(t_1,t_2) : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, такива че са изпълнени следните две условия:

(e1) унитарност и обратимост: $\mathcal{U}(t_1,t_2)^* = \mathcal{U}(t_1,t_2)^{-1}$;

(e2) закон за композиция: $\mathcal{U}(t_1,t_2)\,\mathcal{U}(t_2,t_3) = \mathcal{U}(t_1,t_3)$;

(за $\forall\, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$).

Следствия: 1) От обратимостта на $\mathcal{U}(t_1,t_2)$ и (e2) следва, че

(e3) $\mathcal{U}(t,t) = \hat{1}$ $(\forall t \in \mathbb{R})$,

тъй като: $\mathcal{U}(t,t)\,\cancel{\mathcal{U}(t,t')} = \cancel{\mathcal{U}(t,t')}$.

2.) От (e3) и (e2) следва, че $U(t_1,t_2)$ е обратим и:

(e4) $U(t_1,t_2)^{-1} = U(t_2,t_1)$ $(\forall t_1,t_2 \in \mathbb{R})$.

Наистина, $U(t_1,t_2)\,U(t_2,t_1) = U(t_1,t_1) = \hat{1}$ и
$U(t_2,t_1)\,U(t_1,t_2) = U(t_2,t_2) = \hat{1}$.

<u>Забележки:</u> а) В следствие на нашето упростяващо предположение за крайно-мерност $U(t_1,t_2)$ е просто една унитарна матрица

$$U(t_1,t_2) = \begin{pmatrix} U_{11}(t_1,t_2) & \cdots & U_{1N}(t_1,t_2) \\ \vdots & & \vdots \\ U_{N1}(t_1,t_2) & \cdots & U_{NN}(t_1,t_2) \end{pmatrix}$$

за $\forall t_1,t_2 \in \mathbb{R}$.

б) Ние можехме да приемем първоначално, че $U(t_1,t_2)$ е определена само за $t_1 \geq t_2$. Но тогава ние можем да положим (e4) като определение за $U(t_1,t_2)$ при $t_1 < t_2$.

<u>Допълнителни технически предположения:</u>

Ще предполагаме, че $U(t_1,t_2)\phi$ е диференцируема функция по t_1 и t_2 за $\forall \phi \in \mathcal{H}$ (или поне за навсякъде гъсто линейно подпространство на $\mathcal{H}$).

Необходимото и достатъчно условие за това се задава от една от основните теореми в теорията на самоспрегнати оператори в Хилбертово пространство (глава от Функционалния анализ). Това е теоремата на Стоун (Stone's theorem on one-parameter unitary groups, която е различна от теоремата на Стоун-Ваерщрас / Stone-Weirstrass).

N. N.
18.10.13

Съгласно теоремата на Стоун, необходимо и достатъчно условие за исканата диференцируемост е $U(t_1, t_2)\phi$ да е непрекъсната по t_1 за $\forall \phi \in \mathcal{H}$.

За случая на $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$: ако коефициентите на матрицата $U(t_1, t_2)$ са непрекъснати функции на t_1, то от условията (e1) и (e2) ще следва (по теоремата на Стоун), че коефициентите на матрицата $U(t_1, t_2)$ са диференцируеми функции на t_1 и t_2.

Определяме (въз основа на направените предположения):

$$H(t) := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} U(t_1, t_2) \Big|_{t_1 = t_2 = t}$$

и го наричаме оператор на Хамилтон или още Хамилтониан (в момента t).

<u>Твърдение.</u> Така въведения оператор на Хамилтон, $H(t)$, е самоспрегнат за $\forall t \in \mathbb{R}$, т.е. $H(t)^* = H(t)$.

<u>Доказателство.</u> $H(t)^* = \overline{\left(\frac{1}{i}\right)} \frac{\partial}{\partial t_1} U(t_1, t_2)^* \Big|_{t_1 = t_2 = t}$

$$= -\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} U(t_1, t_2)^{-1} \Big|_{t_1 = t_2 = t}$$

но $\frac{\partial}{\partial t_1} U(t_1, t_2)^{-1} = -\underbrace{U(t_1, t_2)^{-1}}_{=1} \underbrace{\frac{\partial U}{\partial t_1}(t_1, t_2)}_{= iH(t)} \underbrace{U(t_1, t_2)^{-1}}_{=1}$

при $t_1 = t_2 = t \longrightarrow$

$$\Rightarrow \quad H(t)^* = -\frac{1}{i}(-1)\, i H(t) = H(t). \quad \square$$

Забележка. За студентите, които не са срещали матрично диференциално смятане ще отбележим първо, правилото на Лайбниц за матрично-значни функции:

$$\frac{d}{dt}\left(A(t)\cdot B(t)\right) = \frac{dA}{dt}(t)\cdot B(t) + A(t)\cdot\frac{dB}{dt}(t).$$

Оттук намираме $\frac{d}{dt}A(t)^{-1} = -A(t)^{-1}\cdot\frac{dA}{dt}(t)\cdot A(t)^{-1}$,

тъй като

$$0 = \frac{d}{dt}1 = \frac{d}{dt}\left(A\cdot A^{-1}\right) = \frac{dA}{dt}(t)\cdot A(t)^{-1} + A(t)\cdot\frac{d}{dt}A(t)^{-1}.$$

Теорема. Системата от еволюционни оператори

$$\{U(t,t_0)\}_{t,t_0\in\mathbb{R}}$$

задава единственото решение на линейната система от обикновени диференциални уравнения спрямо t, написана в матричния вид:

$$\left|\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t}(t,t_0) = i\,H(t)\cdot U(t,t_0) \\ \text{с начално условие } U(t_0,t_0) = \hat{1}, \end{array}\right. \qquad (Sch)$$

при всяко $t_0\in\mathbb{R}$ (където коефициентите на матрицата $H(t)$ играят ролята на непостоянни коефициенти на системата линейни обикновени диференциални уравнения).

Обратно, ако $H(t)$ е непрекъсната функция на t със стойности, които са ермитови матрици (самоспрегнати оператори в $\mathcal{H}$), то системата (Sch) определя единствено решение за $\forall t_0\in\mathbb{R}$, което задава система от еволюционни оператори с хамилтониан $H(t)$.

Забележки. 1.) Означението (Sch) за горната система от диференциални уравнения идва от името на Шрьодингер (Schredinger), а самите уравнения могат да се нарекът уравнение на Шрьодингер за оператора на еволюцията. В тези уравния ние приемаме операторите на Хамилтон $H(t)$, като първоначално зададени и в следствие определящи операторите на еволюцията.

2.) Системата от диференциални уравнения (Sch) е за коефициентите $U_{jk}(t,t_0)$ на матрицата $U(t,t_0)$. Подробно:

$$\frac{\partial U_{jk}}{\partial t}(t,t_0) = \sum_{\ell=1}^{N} i\, H_{j\ell}(t,t_0)\, U_{\ell k}(t,t_0) \qquad (j,k=1,\dots,n).$$

Ние няма да доказваме приведената теорема в пълната й формулировка, а ще я приемем като следствие от основни теореми за съществуване и единственост в теорията на обикновените диференциални уравнения. И все пак, ние ще приведем обширни аргументи от доказателството на тази теорема, като например, конструкция на решението, тъй като тези разсъждения и конструкции имат много важно значение в КТП.

Първо, непосредствено се проверява, че системата от еволюционни оператори $\{U(t,t_0)\}_{t,t_0\in\mathbb{R}}$ задава решение на диференциалните уравнения (Sch):

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,t_0) = \frac{\partial U}{\partial t'}(t',t_0)\Big|_{t'=t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t'} U(t',t)\, U(t,t_0)\Big|_{t'=t} = \frac{\partial U}{\partial t'}(t',t)\Big|_{t'=t} \cdot U(t,t_0)$$

$$= i\, H(t)\cdot U(t,t_0).$$

Решението на системата (Sch) ще построим по метода на последователните приближения. Ще апроксимираме търсеното решение $U(t,t_0)$ с последователност от решения

$$U_n(t,t_0)\,, \quad n = 0,1,\dots$$

където $U_n(t,t_0)$ са $N\times N$ матрици (или оператори в $\mathcal{H}$) удовлетворяващи уравненията:

$$U_0(t,t_0) = \hat{1} \quad \text{и}$$

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial U_n}{\partial t}(t,t_0) = i\,H(t)\cdot U_{n-1}(t,t_0) \\ \text{с начално условие } U_n(t_0,t_0) = \hat{1} \end{array}\right. \qquad (n = 1,2,\dots).$$

Последното уравнение се решава непосредствено:

$$U_n(t,t_0) = 1 + \int_{t_0}^{t} d\tau \, \frac{\partial U_n}{\partial t}(\tau,t_0) = 1 + \int_{t_0}^{t} d\tau \; i\,H(\tau)\cdot U_{n-1}(\tau,t_0).$$

Итериране: заместване $U_{n-1}(\tau,t_0)$ със съответното решение при $n-1$. Получаваме (преозначавайки интеграционната променлива τ с τ_1):

$$U_n(t,t_0) = 1 + \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \; i\,H(\tau_1)\cdot\left\{1 + \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \; i\,H(\tau_2)\,U_{n-2}(\tau_2,t_0))\right\}$$

$$= 1 + \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \; i\,H(\tau_1) + \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \; i^2 H(\tau_1)\,H(\tau_2)\,U_{n-2}(\tau_2,t_0)$$

$$= 1 + \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \; i\,H(\tau_1) + \dots + \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; i^n H(\tau_1)\cdots H(\tau_n)$$

след като продължим итерацията.

Така, в граница $n \to \infty$ (след малко ще видим, че тя съществува) получаваме:

$$\mathcal{U}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, H(\tau_1)\cdots H(\tau_n) . \qquad (\text{Born})$$

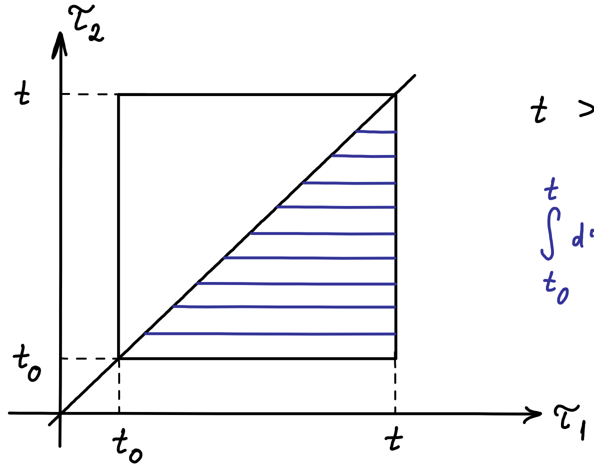
Този ред в контекста на квантовата физика се свързва с Борн и затова сме го означили с (Born). Да отбележим, че n-кратния интеграл в (Born) може да се запише и като следния n-мерен интеграл

$$\int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, H(\tau_1)\cdots H(\tau_n) = \int\limits_{t>\tau_1>\cdots>\tau_n>t_0} d\tau_1 \cdots d\tau_n \; H(\tau_1)\cdots H(\tau_n) .$$

Така, ако обърнем реда на интегриране, ще получим:

$$\mathcal{U}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_{t_0}^{t} d\tau_n \int_{\tau_n}^{t} d\tau_{n-1} \cdots \int_{\tau_2}^{t} d\tau_1 \, H(\tau_1)\cdots H(\tau_n) . \qquad (\text{Born}')$$

Илюстрация:



$t > \tau_1 > \tau_2 > t_0$

$\int_{t_0}^{t} d\tau_2 \int_{\tau_2}^{t} d\tau_1$

Ще изведем основните свойства на решението $\mathcal{U}(t,t_0)$ от редовете (Born) и (Born') разглеждайки ги първоначално като формални степенни редове (по степените на $H(t)$).

Преди всичко, нека да проверим, че редът (Born) наистина задава решение на системата от уравнения (Sch) поне като формален ред:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\partial}{\partial t} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, H(\tau_1) \cdots H(\tau_n) .$$

Тук диференцирането по t за всеки член в сумата е елементарно, тъй като от t зависи само горната граница на външния интеграл. В резултат, интегралите по τ_1 изчезват и $\tau_1 = t$ (членът $n=0$ е $= \frac{\partial}{\partial t} 1 = 0$):

$$\frac{\partial U}{\partial t}(t,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} i^n \int_{t_0}^{t} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, H(t)\, H(\tau_2) \cdots H(\tau_n)$$

$$= i\, H(t) \sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \int_{t_0}^{t} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, H(\tau_2) \cdots H(\tau_n) = i\, H(t) \,.\, U(t,t_0),$$

където при второто равенство сме преминали от $n \mapsto n-1$ и сме преименували $\tau_2, \dots, \tau_n$ към $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$, съответно.

С подобно пресмятане, изхождайки от (Born') се получава формулата:

$$\frac{\partial U}{\partial t_0}(t,t_0) = -i\, U(t,t_0) \cdot H(t_0) . \qquad (Sch')$$

Наистина:

$$\frac{\partial U}{\partial t_0}(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{\partial}{\partial t_0} \int_{t_0}^{t} d\tau_n \int_{\tau_n}^{t} d\tau_{n-1} \cdots \int_{\tau_2}^{t} d\tau_1\, H(\tau_1)\cdots H(\tau_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} i^n (-1) \int_{\tau_n}^{t} d\tau_{n-1} \cdots \int_{\tau_2}^{t} d\tau_1\, H(\tau_1)\cdots H(\tau_{n-1})\, H(t_0)$$

$$= -i\left(\sum_{n=1}^{\infty} i^{n-1} \int_{\tau_n}^{t} d\tau_{n-1} \cdots \int_{\tau_2}^{t} d\tau_1\, H(\tau_1)\cdots H(\tau_{n-1}) \right) \cdot H(t_0)$$

$= -i\, U(t,t_0)\, H(t_0)$, където знакът (-1) при второто равенство е в следствие на диференцирането на интеграл по долна граница.

Изхождайки от (Born) и (Born′) следва и унитарността на $U(t,t_0)$ (като формален ред):

$$U(t,t_0)^* = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{(i^n)} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, \left(H(\tau_1)\cdots H(\tau_n)\right)^*$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n\, H(\tau_n)\cdots H(\tau_1)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_{t}^{t_0} d\tau_1 \int_{\tau_1}^{t_0} d\tau_2 \cdots \int_{\tau_{n-1}}^{t_0} d\tau_n\, H(\tau_n)\cdots H(\tau_1) = U(t_0,t),$$

където при преминаване към третия ред сме обърнали редът на интегриране и сме абсорбирали по един знак (-1). Необходима е още една стъпка:

$$U(t,t_0)^* = U(t_0,t) = U(t,t_0)^{-1}.$$

Последното равенство би следвало от закона за композиция (e2).

Законът за композиция (е2) също може да бъде проверен на ниво формални редове за решението (Born). Тъй като пресмятането тук е по-дълго ние ще приведем само схемата му:

$$U(t_1,t_3) \overset{?}{=} U(t_1,t_2)\,U(t_2,t_3)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_{t_2}^{t_1} d\tau_1 \int_{t_2}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \, H(\tau_1)\cdots H(\tau_n) \right)$$

$$\times \left(\sum_{m=0}^{\infty} i^m \int_{t_3}^{t_2} d\tau_1' \int_{t_3}^{\tau_1'} d\tau_2' \cdots \int_{t_3}^{\tau_{m-1}'} d\tau_m' \, H(\tau_1')\cdots H(\tau_m') \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} i^k \sum_{\substack{n+m=k \\ n,m\geq 0}} \int_{t_2}^{t_1} d\tau_1 \int_{t_2}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \int_{t_3}^{t_2} d\tau_1' \int_{t_3}^{\tau_1'} d\tau_2' \cdots \int_{t_3}^{\tau_{m-1}'} d\tau_m'$$

$$\times H(\tau_1)\cdots H(\tau_n)\, H(\tau_1')\cdots H(\tau_m')$$

и остава да се покаже, че

$$\sum_{\substack{n+m=k \\ n,m\geq 0}} \int_{t_2}^{t_1} d\tau_1 \int_{t_2}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \int_{t_3}^{t_2} d\tau_1' \int_{t_3}^{\tau_1'} d\tau_2' \cdots \int_{t_3}^{\tau_{m-1}'} d\tau_m' \; F$$

$$= \int_{t_3}^{t_1} d\tau_1'' \int_{t_3}^{\tau_1''} d\tau_2'' \cdots \int_{t_3}^{\tau_{k-1}''} d\tau_k \; F \qquad \text{за произволна } F,$$

на което частен случай е тъждеството

$$\int_{t_2}^{t_1} d\tau\, F + \int_{t_3}^{t_2} d\tau\, F = \int_{t_3}^{t_1} d\tau\, F.$$

Преди да приведем обещания аргумент за сходимостта на реда (Born) ще разгледаме важния частен случай, когато операторите на Хамилтон не зависят от времето:

$$H(t) = H \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Такива квантови динамични системи се наричат автономни. Тогава редът (Born) дава:

$$U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int_{t_2}^{t_1} d\tau_1 \int_{t_2}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; H^n.$$

Но от друга страна

$$\int_{t_2}^{t_1} d\tau_1 \int_{t_2}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_2}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; 1 = \frac{1}{n!}(t-t_0)^n,$$

което се проверява непосредствено с индукция по n. Така, за автономни системи получаваме:

$$U(t,t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, i^n H^n (t-t_0)^n = \exp\big(iH\cdot(t-t_0)\big)$$

$$= \text{функция на } t-t_0,$$

където във второто равенство разпознахме реда на експонентата (приложен върху матрици).

В случая на автономни системи е прието да се ползва същото означение

$$U(t,t_0) \equiv U(t-t_0).$$

Тогава закона за композиция (е2) приема вида:

$$U(t_1)\cdot U(t_2) = U(t_1+t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Приведената връзка с експоненциалния ред дава и аргумент за сходимостта на реда (Born). Наистина, тъй като $H(t)$ е непрекъсната функция, то такава е и нейната операторна норма $\|H(t)\|$ и следователно за $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ $\exists M > 0$ такова, че

$$\|H(t)\| \leqslant M .$$

Следователно,

$$\begin{aligned}
\|U(t,t_0)\| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; H(\tau_1)\cdots H(\tau_n) \right\| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; \left\| H(\tau_1)\cdots H(\tau_n) \right\| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; \|H(\tau_1)\| \cdots \|H(\tau_n)\| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t} d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} d\tau_n \; M^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} M^n (t-t_0)^n = \exp\big(M\cdot(t-t_0)\big),
\end{aligned}$$

където сме използвали многократно неравенството на триъгълника

$$\|A+B+\cdots\| \leqslant \|A\| + \|B\| + \cdots ,$$

$$\left\| \int_{t_0}^{t} d\tau \; A(\tau) \right\| \leqslant \int_{t_0}^{t} d\tau \cdot \|A(\tau)\| ,$$

както и неравенството на Банах: $\|A\cdot B\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.

N. N.
18.10.13

3. Оператор на разсейване

Редът (Born) за еволюционни оператори е в основата на една от формулите с най-голямо практическо приложение не само в КТП но и в квантовата механика : това е така нареченото "разлагане на оператора на разсейване в ред по теория на пертурбациите"

3.1. Понятие за разсейване

Понятието за разсейване възниква при сравняването на две различни динамики (системи от еволюционни оператори) зададени за една и съща квантова система (или по-точно, при една и съща квантова статистика). Ние отново ще разсъждаване в картината на Шрьодингер, приемайки че чистите състояния на описваната система се определят от вектори на състоянията в едно (пред) Хилбертово пространство $\mathcal{H}$. (За простота и прецизност, нека отново $\mathcal{H} = \mathbb{C}^N$ - крайно-мерен модел.)

И така, в $\mathcal{H}$ са зададени две системи от оператори на еволюцията, които условно ще наречем :

- $\{U_0(t,t_0)\}_{t,t_0 \in \mathbb{R}}$ - описваща "свободна динамика" или още : "динамика без взаимодействие"

- $\{U(t,t_0)\}_{t,t_0 \in \mathbb{R}}$ - описваща "НЕсвободна динамика" или още : "динамика при взаимодействие"

N. N.
18.10.13

Основното предположение е, че несвободната еволюция на всяко състояние $\phi \in \mathcal{H}$:

$$U(t, t_0)\phi$$

при моменти t от безкрайното бъдеще или безкрайното минало изглежда като свободна еволюция. Това можем да запишем математически като двойка условия:

За $\forall \phi \in \mathcal{H}$ $\exists \phi_{out} \in \mathcal{H}$ и $\exists \phi_{in} \in \mathcal{H}$ такива, че

$$U(t_1, t_0)\phi \underset{t_1 \to \infty}{\cong} U_0(t_1, t_0)\phi_{out} \qquad (out)$$

$$U(t_2, t_0)\phi \underset{t_2 \to -\infty}{\cong} U_0(t_2, t_0)\phi_{in} \qquad (in)$$

Още по-подробен математически запис е:

$$\lim_{t_1 \to \infty} \| U(t_1, t_0)\phi - U_0(t_1, t_0)\phi_{out} \| = 0 \quad \text{и}$$

$$\lim_{t_2 \to -\infty} \| U(t_2, t_0)\phi - U_0(t_2, t_0)\phi_{in} \| = 0 .$$

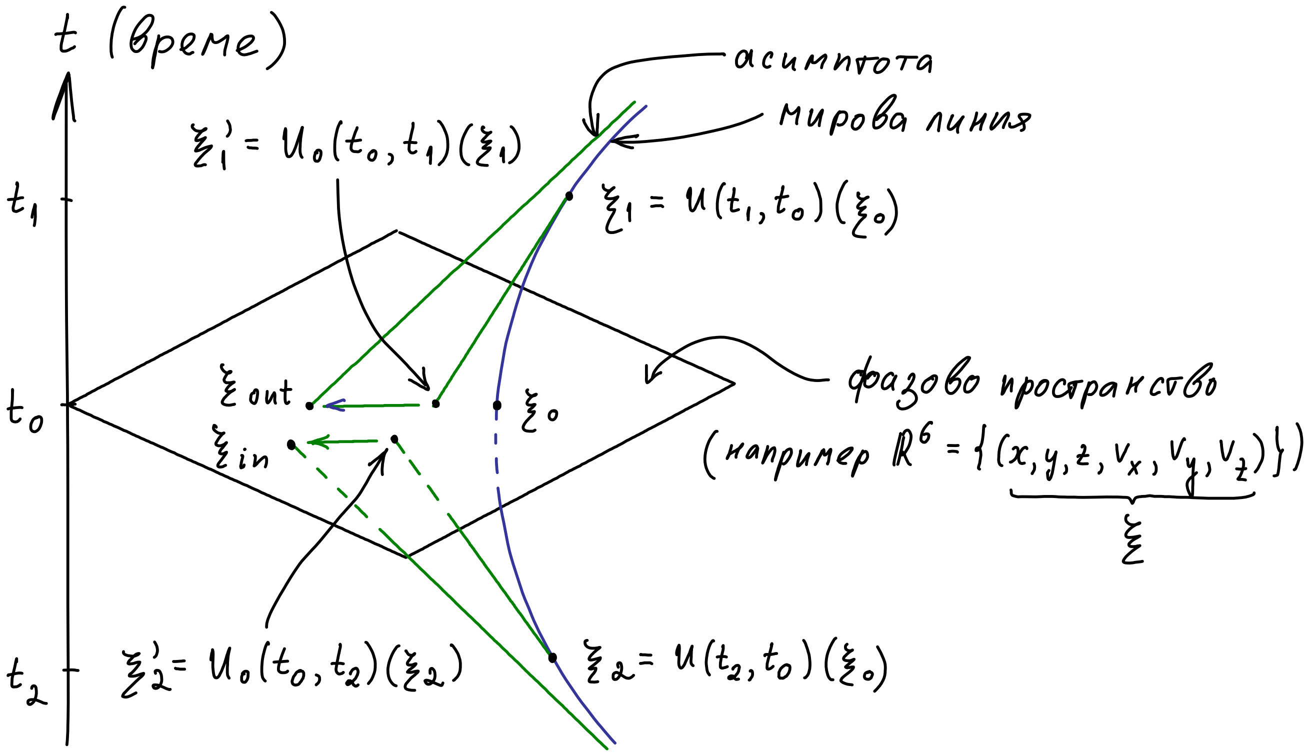
Нагледни илюстрации с пример на разсейване на материална точка от отблъскващ център в случая на класическата механика са приведени на следващата страница.

N. N.

18.10.13

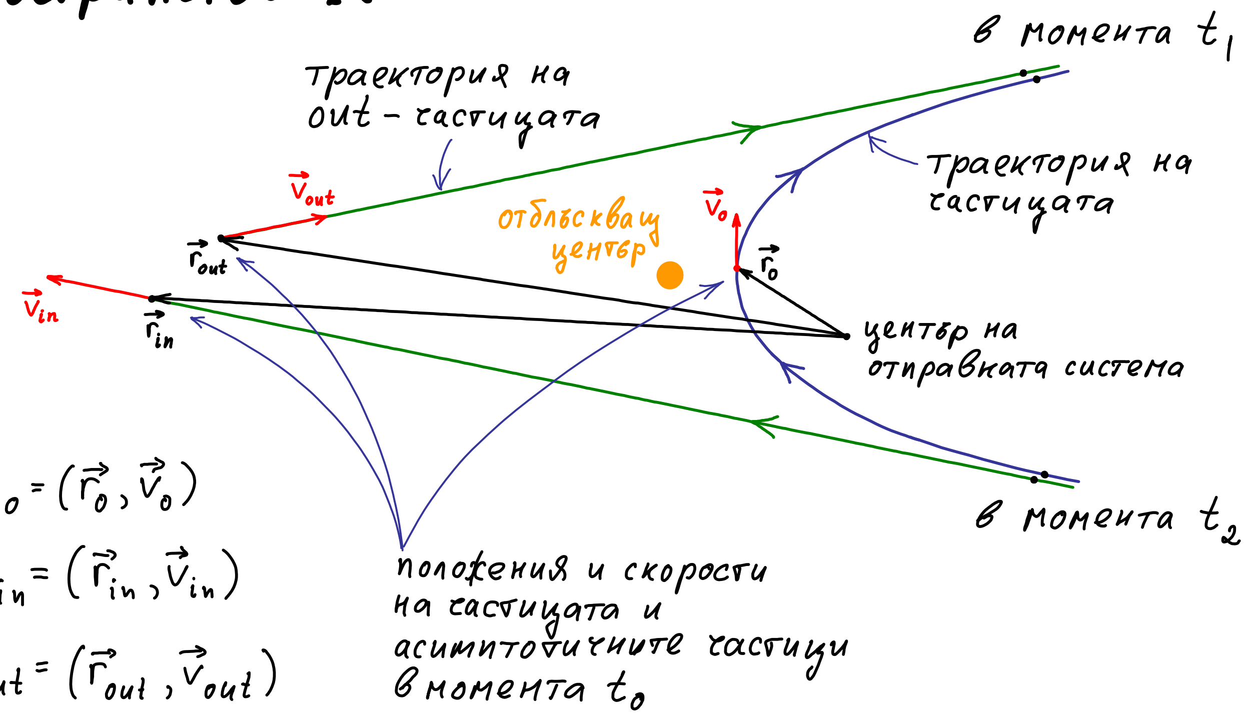
-26-

Гледна точка на мирова линия:



Гледна точка на траектория

конфигурационно пространство $\mathbb{R}^3$



$\xi_0 = (\vec{r}_0, \vec{v}_0)$

$\xi_{in} = (\vec{r}_{in}, \vec{v}_{in})$

$\xi_{out} = (\vec{r}_{out}, \vec{v}_{out})$

Векторите ϕ_{in} и ϕ_{out} се наричат също асимптотични състояния, а полученото съответствие:

$$\phi_{in} \xmapsto[S]{} \phi_{out} \qquad \text{- оператор на разсейване.}$$

В случая когато операторът на разсейване S е определен еднозначно върху цялото Хилбертово пространство на състоянията и е също обратим, то ще казваме, че теорията е асимптотически пълна.

Следвайки утвърдените традиции в теоретичната физика ние първо ще изведем формално представяне на оператора S. От условията (out) и (in) ние получаваме

$$\mathcal{U}_0(t_1, t_0)^{-1}\, \mathcal{U}(t_1, t_0)\, \phi \underset{t_1 \to \infty}{\cong} \phi_{out} \,,$$

$$\phi \underset{t_2 \to -\infty}{\cong} \mathcal{U}(t_2, t_0)^{-1}\, \mathcal{U}_0(t_2, t_0)\, \phi_{in} \,.$$

Замествайки ϕ от второто към първото (асимптотично) равенство получаваме:

$$\phi_{out} \underset{\substack{t_1 \to \infty \\ t_2 \to -\infty}}{\cong} \mathcal{U}_0(t_1, t_0)^{\cancel{-1}}\, \underbrace{\mathcal{U}(t_1, t_0)\, \mathcal{U}(t_2, t_0)^{\cancel{-1}}}_{= \mathcal{U}(t_1, t_2) \quad (\text{по } (e2))}\, \mathcal{U}_0(t_2, t_0)\, \phi_{in}$$

по (e4)   по (e4)

(вж. стр. 12 и 13).

Така получаване следното представяне на оператора на разсейване като граница:

$$S = \lim_{\substack{t_1 \to \infty \\ t_2 \to -\infty}} S(t_1, t_2), \qquad (S\text{-}\lim)$$

където

$$S(t_1, t_2) = U_0(t_0, t_1)\, U(t_1, t_2)\, U_0(t_2, t_0). \qquad (S)$$

Тъй като $S(t_1, t_2)$ е произведение на унитарни оператори то той е също унитарен. Следователно, границата $(S\text{-}\lim)$, ако съществува, също ще бъде унитарен оператор:

Извод: Операторът на разсейване (когато съществува) е унитарен оператор.

Забележка. Операторите $S(t_1, t_2)$ и S зависят явно от избрания начален момент t_0. По-късно ще видим, че във важния случай, когато и двете динамики $U_0(t, t_0)$ и $U(t, t_0)$ са автономни, тогава S не зависи от t_0.

3.2. Пресмятане на оператора на разсейване

Основното наблюдение:

<u>Теорема</u>. Системата от оператори $\{S(t_1,t_2)\}_{t_1,t_2\in\mathbb{R}}$ зададена по формула (S) е система от оператори на еволюция (т.е. удовлетворява нашето определение от стр. 12).

<u>Доказателство</u>. Условие (е1) вече установихме. Условие (е2):

$$S(t_1,t_2)\,S(t_2,t_3) =$$

$$= U_0(t_0,t_1)\underbrace{U(t_1,t_2)\underbrace{U_0(t_2,t_0)\,U_0(t_0,t_2)}_{U_0(t_2,t_2)=1}U(t_2,t_3)}_{U(t_1,t_3)}U_0(t_3,t_0)$$

$$= U_0(t_0,t_1)\,U(t_1,t_3)\,U_0(t_3,t_0) = S(t_1,t_3). \quad \square$$

<u>Забележка</u>. Тъй-като операторите $S(t_1,t_2)$ носят характер на еволюционни оператори, то често те се въвеждат в една специална еволюционна картина, наречена картина на взаимодействието.

Така, ние можем да приложим редът (Born) за случая на еволюционните оператори $S(t_1, t_2)$:

$$S(t_1,t_2) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int\limits_{t_1 > \tau_1 > \cdots > \tau_n > t_2} d\tau_1 \cdots d\tau_n \quad I(\tau_1) \cdots I(\tau_n), \qquad (S\text{-Born})$$

където $I(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} S(t_1, t_2) \Big|_{t_1 = t_2 = t}$

е съответния Хамилтонов оператор, наричан още Хамилтониан на взаимодействието.

За да пресметнем $I(t)$ нека въведем Хамилтонианите на двете сравнявани динамики:

- $H_0(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial U_0}{\partial t_1}(t_1, t_2) \Big|_{t_1 = t_2 = t}$ – свободен Хамилтониан
- $H(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial U}{\partial t_1}(t_1, t_2) \Big|_{t_1 = t_2 = t}$ – пълен Хамилтониан

$$\Rightarrow \quad I(t) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} S(t_1, t_2) \Big|_{t_1 = t_2 = t}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t_1} U_0(t_0, t_1)\, U(t_1, t_2)\, U_0(t_2, t_0) \Big|_{t_1 = t_2 = t}$$

$$= - \left(U_0(t_0, t)\, H_0(t) \right) \underbrace{U(t,t)}\, U_0(t, t_0)$$

$$+ \, U_0(t_0, t) \left(H(t)\, \underbrace{U(t,t)} \right) U_0(t, t_0),$$

където сме използвали формули (Sch′) и (Sch), приложени за U_0 и U, съответно.

Полученият резултат:

$$I(t) = U_0(t_0, t) \left(H(t) - H_0(t) \right) U(t, t_0).$$

и също за оператора на разсейване:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \int\limits_{\tau_1 > \dots > \tau_n} d\tau_1 \cdots d\tau_n \; I(\tau_1) \cdots I(\tau_n)$$

(S-Matrix)

(получава се от (S-Born) при $t_1 \to +\infty$ и $t_2 \to -\infty$).

N. N.
18.10.13

3.3. Коментари

Въведеното понятие за разсейване и полученото развитие в ред (S-Matrix) представлява първия главен резултат в настоящия курс и заслужава редица допълнителни коментари.

1.) Физическа интерпретация на оператора на разсейване: сечения на разсейване.

Свободната еволюция притежава определени запазващи се величини (закони за запазване). Например, ако това е свободно движеща се частица, то нейния импулс $\mathbb{P}$ е такава величина. За простота, ще приемем, че тази запазваща се величина приема краен брой дискретни стойности:

$$\{p, p', p'', \dots\}$$

Нека съответен ортонормиран базис от собствени вектори е

$$\{\phi(p), \phi(p'), \phi(p''), \dots\}$$

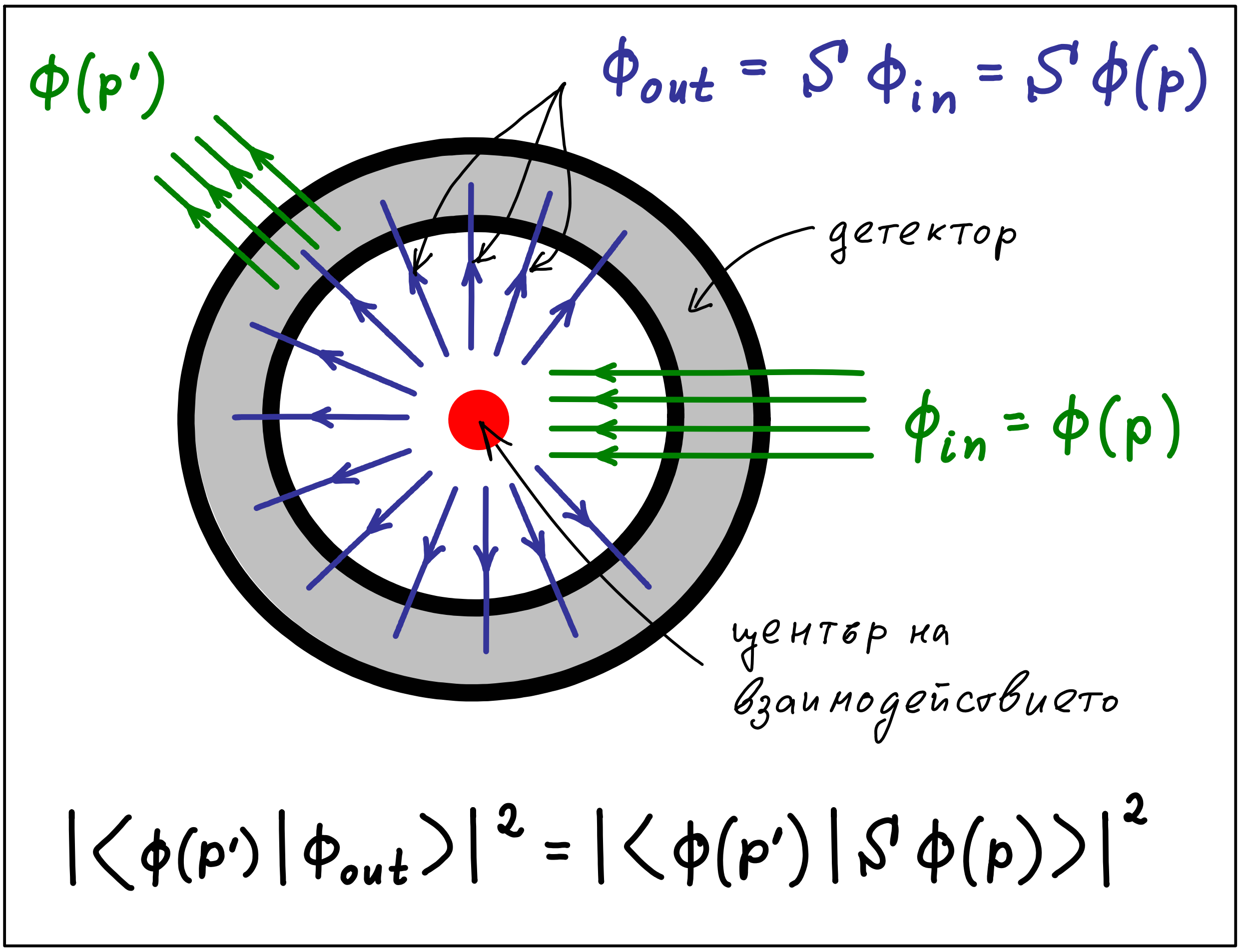
т.е.,
$$\mathbb{P}\,\phi(p) = p\,\phi(p),$$
$$\mathbb{P}\,\phi(p') = p'\,\phi(p') \quad \text{и т.н.}$$

Ако приготвим първоначално системата (сноп от частици) далеч от центъра на взаимодействие така, че да бъде в състояние със собствен вектор $\phi(p)$, то тъй като еволюцията на системата е почти свободна (взаимодействието е слабо), то първоначалното състоянието на системата слабо ще се изменя. С други думи, всяка частица ще остава с постоянен импулс p. Така, нашето асимптотично in-състояние е: $\phi_{in} = \phi(p)$.

N. N.

18.10.13

След като частицата премине покрай разсейващия център означен с червена точка на фигурата:



Тогава системата ще еволюира към асимптотично състояние с вектор $\phi_{out} = S\phi_{in} = S\phi(p)$. Схематично, това състояние е изобразено на горната фигура със сини лъчи изходящи от центъра на разсейване. Състоянието ϕ_{out} не е по принцип собствен вектор на наблюдаемата P. Ето защо, ако направим повторно измерване на P след разсейването, посредством детектори разположени около разсейващия център, то ние ще измерим някаква стойност p' с определена вероятност, която съгласно втората ни лекция ще бъде:

вероятността за преход от ϕ_{out} към $\phi(p')$

$$= |\langle\phi(p')|\phi_{out}\rangle|^2 = |\langle\phi(p')|S\,\phi(p)\rangle|^2.$$

Така, ние можем да измерим на експеримент вероятностите

$$\sigma_{p,p'} = |\langle \phi(p') | S \phi(p) \rangle|^2,$$

които и носят името сечение на разсейване.

Разбира се, в реалистичния случай P е векторна (три компонентна) величина, като всяка компонента има непрекъснат спектър. Това налага известно усложнение в горната чисто алгебрична схема на собствени вектори и собствени стойности и води до непрекъснати вероятностни разпределения.

2.) Хамилтонианът на взаимодействие $I(t)$ съдържа в себе си разликата $H(t) - H_0(t)$. Ако взаимодействието е слабо, то това ще намери математически израз като малка разлика $H - H_0$ и оттам, малък $I(t)$. В този случай редът (S-Matrix) дава развитие на оператора на разсейване в ред по степените на Хамилтониана на взаимодействие $I(t)$. Ето защо този ред се нарича ред на теория на пертурбациите ($I(t)$ е самата пертурбация).

Интересно е да се отбележи, че въз основа на този ред са получени, само от първите му три члена, най-точните предсказания потвърждавани до сега на експеримент: точността е в 12 значещи цифри и това се отнася за така наречения аномален магнитен момент на електрона.

3.) Основен интерес в КТП представлява случая когато и двете сравнявани динамики $U_0(t, t_0)$ и $U(t, t_0)$ са автономни. Независимо от това обаче, еволюционните оператори $S(t, t_0)$ си остават неавтономни поради което и направихме нашето изложение съобразено с по-общия случай на неавтономност.

В следващата лекция ние ще се върнем към картината на Хайзенберг и ще изведем диференциалните уравнения определящи еволюцията на наблюдаемите:

$$\frac{dA}{dt}(t) = i\,[H, A(t)]$$

(за автономна система), където ние срещаме за първи път най-важния алгебричен обект в квантовата физика:

$$\text{Комутатор: } [A, B] := A \cdot B - B \cdot A$$

Неговите свойства ще ни дадат повод да споменем важни математически понятия като алгебри на Ли и връзката им с групи.

Освен това, на този етап ние ще можем да направим съвсем естествено съответствие с класическата Хамилтонова механика.

По предварителен план, лекцията трябва да завърши с разглеждане на най-простата квантово механична система: квантов осцилатор.